

УДК 518.5:004.9

## РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМА ДЛЯ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПОЛУМАРКОВСКИХ ГИПЕРСЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Еремеев В.С.

Мелитопольский государственный педагогический  
университет имени Богдана Хмельницкого, г. Мелитополь,  
e-mail: [eremeev@mdpu.org.ua](mailto:eremeev@mdpu.org.ua)

Литвиненко К.В.

Днепропетровский национальный университет железнодорожного  
транспорта имени академика В. Лазаряна, г. Днепр,  
e-mail: [konstantinl@mail.ua](mailto:konstantinl@mail.ua)

**Актуальность.** Компьютерное моделирование позволяет анализировать сложные динамические системы, подвергающиеся воздействию многочисленных случайных факторов. Во многих случаях использование функции распределения вероятности реализации стохастического процесса достаточно хорошо отвечает предположению о соблюдении постоянных условий, определяющих структуру шумовых помех. Если условия функционирования системы существенно изменяются, то для учета их воздействия вводят дополнительные элементы, корректирующие поведение системы в условиях неопределенности [1], [2]. Такой подход, отличаясь некоторой искусственностью, позволяет получать удовлетворительные результаты при анализе не очень сложных систем.

Другой подход описания системы в изменяющихся условиях основан на принципиально новых методах, предложенных в работах И.И. Горбаня [3], [4]. Исследования в этом направлении привели к созданию физико-математической теории, получившей название теории гиперслучайных явлений [4], которая открывает новые возможности при разработке компьютерного моделирования Марковских и полумарковских цепей [5], [6]. Настоящая статья посвящена изучению полумарковских гиперслучайных процессов с целью их использования при компьютерном моделировании производственных и экономических систем.

**Цель статьи** – разработать алгоритм описания полумарковских гиперслучайных процессов при проектировании компьютерных моделей стохастических систем.

**Тетрада распределения гиперслучайной величины.** Под скалярной гиперслучайной величиной  $\Omega$  понимают числовую функцию с областью определения  $\Omega$ , для которой при постоянных условиях наблюдения  $g \in G$  определяется вероятностная мера, но для самих условий  $g$  мера не

определена [3], [4]. Значения гиперслучайной рискованной величины  $x \in X$  получаются с помощью функции  $x = \Psi(\omega)$ , где  $\omega \in \Omega$ .

Гиперслучайную величину  $X$  можно определить через условные случайные величины  $X/g$ ,  $g \in G$  с использованием следующих функций [4]

а) функции распределения вероятности

$$F(x/g) = P\{X \leq x/g\}, \quad (1)$$

где  $P\{X \leq x/g\}$  - вероятность выполнения неравенства  $X \leq x$  для условий  $g$ ;

б) функции плотности вероятности

$$f(x/g) = \frac{dF(x/g)}{dx}; \quad (2)$$

в) математические ожидания и дисперсии

$$m_{x/g} = M[X/g], D_{x/g} = D[X/g] = M[(X/g - m_{x/g})^2]. \quad (3)$$

Теоретической базой для описания гиперслучайных событий [4] является тетрада  $(\Omega, \mathfrak{F}, G, P_g)$ , где  $\Omega$  - пространство элементарных событий  $\omega$ ,  $\mathfrak{F}$  - борелевское поле,  $G$  - множество условий  $g$ ,  $P_g$  - вероятностная мера подмножества событий, зависящая от условия  $g$ . Вероятностная мера  $P_g$  определяется для всех подмножеств событий и всех условий  $g$ , хотя мера для самих условий  $g$  отсутствует.

Невозможность задания вероятностной меры гиперслучайного события приводит к необходимости введения диапазонных характеристик [3]. Под границами вероятности понимают верхнюю  $P_S(A)$  и нижнюю  $P_L(A)$  границы

$$P_S(A) = \sup_{g \in G} P(A), P_L(A) = \inf_{g \in G} P(A), \quad (4)$$

Если  $g = \text{const}$ , то границы (4) совпадают и гиперслучайная величина вырождается в случайную величину. Границы (4) являются неотрицательными числами:  $P_S(A) \geq 0, P_L(A) \geq 0$ . В случае попарно несовместных гиперслучайных событий выполняются очевидные неравенства

$$P_S(\bigcup_n A_n) \leq \sum_n P_S(A_n), P_L(\bigcup_n A_n) \geq \sum_n P_L(A_n).$$

Для множества элементарных событий  $\Omega$  выполняются равенства:  $P_S(\Omega) = P_L(\Omega) = 1$ . Точное определение функции распределения  $F(x/g)$  при гиперслучайном подходе не представляется возможным. В этом случае вводятся границы для функции распределения [4]

$$F_S(A) = \sup_{g \in G} P(X \leq x/g), F_L(A) = \inf_{g \in G} P(X \leq x/g). \quad (5)$$

В реальных условиях  $F_S(x) \geq F_L(x)$ , поэтому всегда существует неотрицательная разность  $\Delta F = F_S(x) - F_L(x)$ , которая отражает неопределенность закона функции распределения. Если уровень неопределенности моделируемой системы возрастает, то это приводит к

увеличению области  $\Delta F$ . Наибольший уровень неопределенности системы соответствует случаю, когда  $F_L(x)=1, F_S(x)=0$ . В этом случае объективная оценка гиперслучайной величины  $X$  затруднена, а в некоторых случаях и невозможна.

Генеральная совокупность гиперслучайных величин  $X = \{X / g \in G\}$  представляет собой множество всех реализаций наблюдаемых значений при всех условиях  $g$ . Исследуемая выборка состоит из гиперслучайных величин  $X = \{X / g \in G\}$ , если все они принадлежат генеральной совокупности при фиксированных условиях  $g$  и соответствуют условному закону распределения  $F(x/g)$ .

**Моделирование плотности и функции распределения гиперслучайной величины.** Построение полумарковских гиперслучайных моделей предполагает наличие информации о плотности распределения случайной величины. Если случайная величина подчиняется известному закону, например, нормальному распределению, то описание полумарковского гиперслучайного процесса не представляет труда. В ряде случаев полная функция распределения является суперпозицией нескольких известных законов. В качестве примера на рис.1 представлен график зависимости полной плотности распределения случайной величины (нижняя кривая), которая получена путём наложения пяти частных статистик с известными нормальными законами распределения с весами  $p_i = 0,2, i = 1, \dots, 5$ . На рис. 2 приведены графики функций распределения случайных величин, соответствующих плотностям распределения на рис.1.

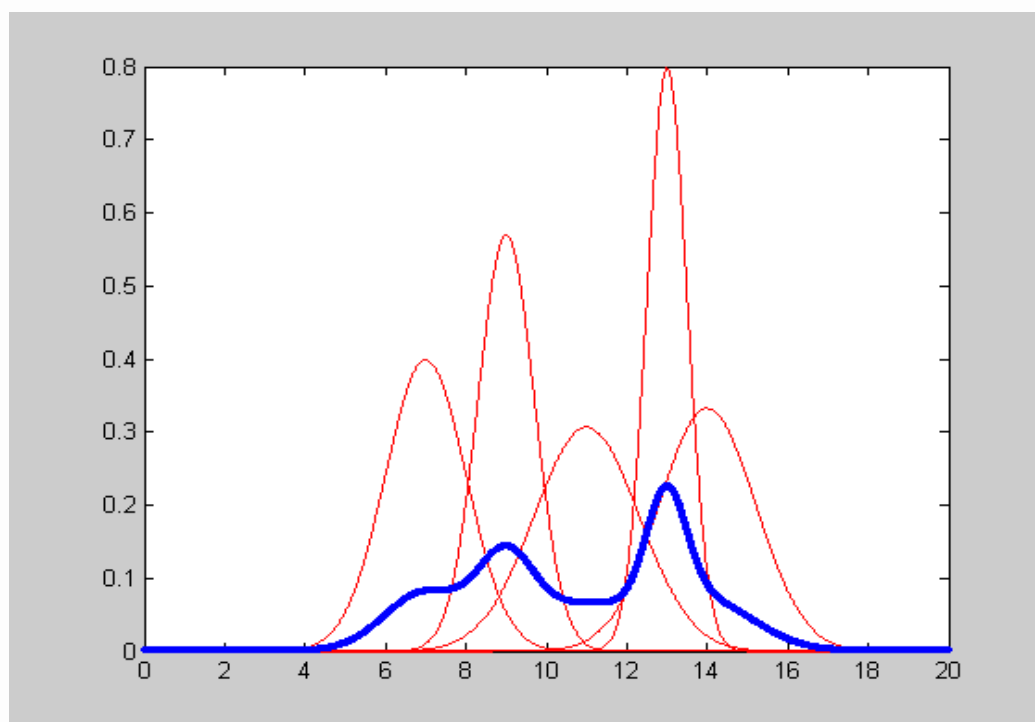


Рис.1. Плотность распределения случайной величины (нижняя кривая) для пяти частных статистик

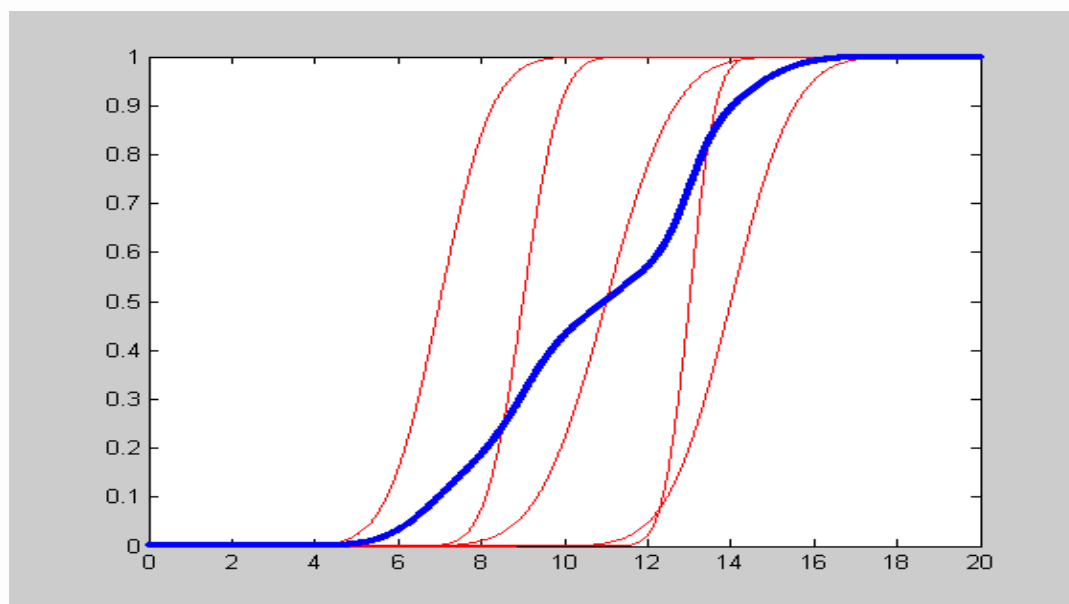


Рис.2. Распределения случайных величин пяти частных статистик, формирующих полную функцию распределения

Если математические ожидания и дисперсии частных статистик известны, то математическая модель полной функции распределения её плотности может быть получена с использованием интерполяционных полиномов [7,8,9]. Обозначим рассчитанные значения полной плотности распределения  $f(x)$  в узловых точках  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$  на отрезке  $[a; b]$  через  $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ . Полином Лагранжа для указанного отрезка имеет вид

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)} \quad (6)$$

Адекватность представления функции  $f(x)$  с помощью полинома (6) определяется ошибкой задания значений в узловых точках  $x_k$ . Современные программные средства обеспечивают точность расчёта  $f(x_k)$  не менее  $10^{-20}$ , поэтому интерполирование  $f(x)$  формулой (6) оказывается достаточно эффективным. Тестовые испытания показали, что при большом числе узлов ( $n=10-50$ ) моделирование полной плотности распределения, представленной на рис. 1, позволяет обеспечить точность не менее  $10^{-5}-10^{-10}$ . Полная функции распределения случайной величины  $F(x)$  может быть найдена численным интегрированием найденной плотности распределения по формуле

$$F(x) = \int_a^x f(z) dz \quad \text{или с использованием полинома Лагранжа типа (6), в}$$

котором значения вместо  $f(x_k)$  следует заменить значениями функции распределения  $F(x_k)$ .

Точность задания эмпирической функции распределения случайной величины, как правило, не слишком велика, поэтому интерполирование



полиномом Лагранжа даёт худшие результаты. В этом случае желательно воспользоваться методом сплайнов [10].

**Описание гиперслучайных полумарковских процессов.** Введем понятие гиперслучайного полумарковского процесса. Рассмотрим систему  $S$ , которая находится в одном и только в одном из конечного множества состояний  $S_1, S_2, \dots, S_n$ . Пусть в начальный момент система находится в состоянии  $S_i$ , а переход в состояние  $S_j$  осуществляется с вероятностью  $p_{ij} \geq 0, \sum_j p_{ij} \leq 1$  для всех  $i$  и  $j$ . Обозначим через  $E$  такое счетное подмножество, принадлежащее множеству  $N$ , для которого при любых  $i, j \in E$  существуют неотрицательные измеримые функции  $Q_{ij}(x)$ . Известно, что матрица  $Q_{ij}(x) = \{Q_{ij}(x); i, j \in E\}$  является полумарковской, если для всех  $i, j \in E$  выполняются следующие условия:

1.  $Q_{ij}(x) = 0$  для всех отрицательных значений аргумента.
2.  $Q_{ij}(x)$  является неубывающей непрерывной справа функции всех неотрицательных значений аргумента.
3.  $\sum_{j \in E} Q_{ij}(x) = P_i \leq 1$  для всех  $i \in E$  и неотрицательных значений аргумента.

Элементы стохастической матрицы  $Q_{ij}$  будем понимать как

$$Q_{ij}(x/g) = p_{ij} \cdot T_{ij}(x/g), \quad (7)$$

где  $T_{ij}(x/g)$  - гиперслучайные функции распределения неотрицательных случайных величин для условий  $g$ . Матрицу  $Q_{ij}(x/g)$  будем называть гиперслучайной полумарковской.

Гиперслучайные функции распределения  $T_{ij}(x/g)$ , характеризующие пребывание системы в состоянии  $S_i$ , зависят как от состояния  $S_i$ , так и от  $S_j$ . При этом  $T_{ij}(x/g)$  не зависят от предыстории процесса и определяются только состояниями систем  $S_i$  и  $S_j$ . Полумарковская гиперслучайная матрица является естественным расширением понятия гиперслучайной функции распределения. Действительно, если значения обычной функции распределения принадлежат отрезку  $[0;1]$ , то полумарковская гиперслучайная матрица заключена между 1 и матрицей  $Q_{ij}(x/g)$ .

Поведение системы при заданном начальном условии полностью определяется матрицей вероятностей перехода  $P = \{p_{ij}\}$  из состояния  $S_i$  в состояние  $S_j$  и соответствующей матрицей гиперслучайных функций распределения  $T_{ij}(x/g)$ . Для непрерывных гиперслучайных величин вместо

матрицы  $T_{ij}(x/g)$  может быть принята матрица плотностей вероятностей  $\{f_{ij}(x/g)\}$ .

Используя теоремы сложения и умножения вероятностей, можно отыскать безусловную функцию распределения пребывания системы в состоянии  $S_j$

$$F(x/g) = \sum_{j=1}^n p_{ij} \cdot T_{ij}(x/g); i, j = 1, 2, \dots, n \quad (8)$$

Для безусловной плотности вероятности пребывания системы в состоянии  $S_j$  соответственно имеем

$$f(x/g) = \sum_{j=1}^n p_{ij} \cdot f_{ij}(x/g); i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (9)$$

Таким образом, алгоритм вычислений с применением полумарковских гиперслучайных моделей предусматривает следующие этапы:

1. Определение связей в системе как конечного множества состояний  $S = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$  с последующим построением графа состояний.
2. Выбор подходящего математического метода (математической модели) задания полумарковского процесса.
3. Изучение математической модели с целью определения главных характеристик полумарковского процесса (вероятности, времени пребывания в определенном состоянии).
4. Установление связи между главными характеристиками полумарковской модели и характеристиками исследуемой системы.

**Выводы.** Предложенный метод позволяет исследовать полумарковские модели на основе гиперслучайного подхода и производить оценку систем для нестабильных условий получения статистик. Сформулированные принципы могут быть заложены в основу стратегии оценки технологических рисков производственно - технологических систем с учётом человеческого фактора, надежности диагностики систем с учетом неопределенности, оптимизационного управления производственно-экономическими системами по методу «оптимума номинала», оценивания надежности в системах с переменной структурой. Представленный подход может быть реализован в виде компьютерной имитационной модели системы.

### Литература

1. Кунцевич В.М. Управление в условиях неопределенности: гарантированные результаты в задачах управления и идентификации / В.М. Кунцевич. - К.: Наукова думка, 2006. - 261с.
2. Хьюбер П. Робастность в статистике/ Хьюбер П. - М.: Мир, 1984. - 303 с.
3. Горбань И.И. Гиперслучайные функции и их описание / И.И. Горбань // Известия вузов. Радиоэлектроника. - 2006. - Т.8, № 1-2. - С. 16-27.
4. Горбань И.И. Теория гиперслучайных явлений: физические и математические основы / И.И. Горбань. - НАН Украины, Институт проблем математических машин и систем. К.: Наукова думка, 2011. - 317с.

5. Хант Дж.А. Марковские процессы и потенциалы / Дж. А. Хант. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1962. – 283 с.
6. Королюк В.С. Полумарковские процессы и их приложения / В.С. Королюк, А.Ф. Турбин. - К.: Наукова думка, 1976. – 184с.
7. Корн Г. Справочник по математике. Для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. - М.: Изд. «Наука», 1974.– 832 с.
8. Литвиненко К.В. Оценка рисков с помощью гиперслучайных стохастических моделей /К.В. Литвиненко // Матеріали міжнародної науково-технічної конференції (24–26 березня, 2015р.) «Інформаційні технології в металургії та машинобудуванні». – Дніпропетровськ, 2015. – С. 89.
9. Литвиненко К.В. Полумарковский гиперслучайный подход к оценке рисков систем / К.В. Литвиненко // Зб. наук. праць ОДАТРА. – 2014. – Вип.1(4). – С. 78–81.
10. Еремеев В.С. Сравнительный анализ неточности в задачах прикладной геометрии при использовании полиномов Лагранжа и сплайнов / В.С.Еремеев, И.М. Юрив. - Материалы международной научно-практической конференции. (28.10. 2013, г. Мин. воды). «Научные итоги: достижения, проекты, гипотезы». Изд. Северо-Кавказского филиала Белгородского гос. технол. универс. им. В.Г.Шухова. – 2014, №18, с.142–146.

**Анотація.** Стаття присвячена дослідженню моделювання стохастичних процесів, випадкові величини яких не задовольняють умові статистичної стійкості. Досліджується можливість представлення функції розподілу гіпервипадкової величини за допомогою процесу усереднення. Запропоновано алгоритм апроксимації усереднених кривих методами теорії сплайнів. Розглядається застосування гіпервипадкового підходу до моделювання процесів, що описуються напівмарківськими моделями.

**Ключові слова:** імовірність; гіпервипадкові величини; комп'ютерне моделювання; напівмарківські моделі; стохастичне моделювання.